

К билетам 8-13.

Особенность этой темы в том, что одни и те же формулы будут всплывать раз по десять и обсасываться по столько же. И один раз – ради чего-то действительно полезного, оставшиеся девять раз – для введения нахрен не нужной новой физической величины, которая нигде не нужна, кроме как на экзамене.

Замечание. В этой методичке есть вывод некоторых формул. Для удобства читателя он начинается со слов

(начало вывода

И заканчивается

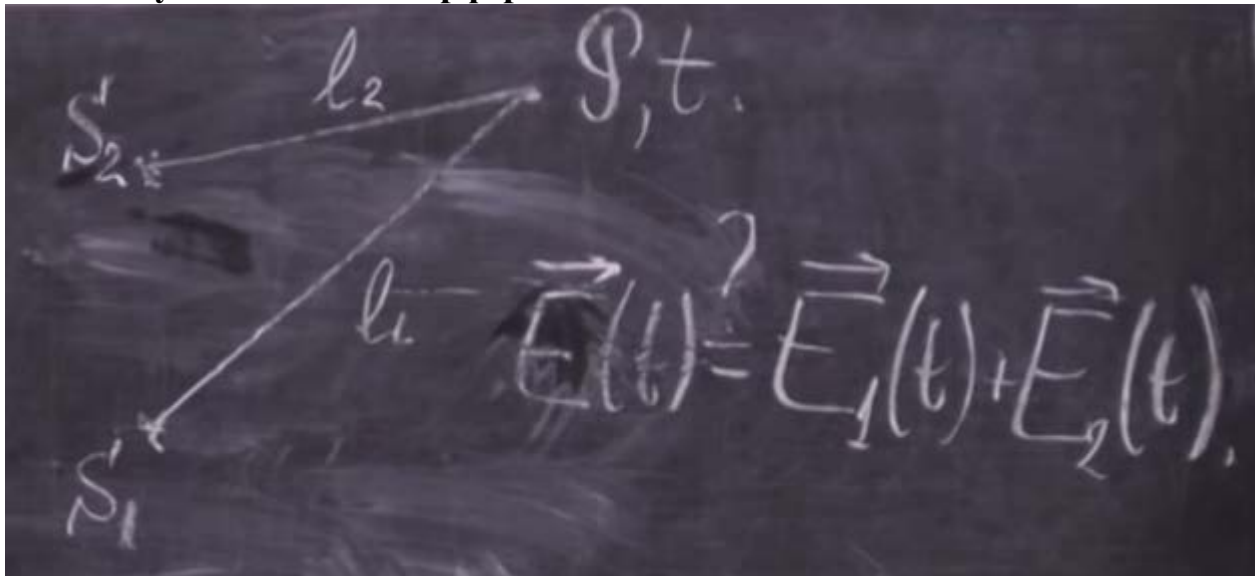
Конец вывод)

Так что если читатель открыл данную методу в ночь перед экзом, то, во-первых, валерьянка в холодильнике, во-вторых, ему разумнее пропустить то, что стоит между двумя данными операторными скобками. В остальных случаях очень советую читать вывод, я стараюсь расписывать его подробно и с комментариями. В отличие от одного говнюка, который не закоментил свой код на С, а я его стырил. Код, конечно, а не говнюка.

Вообще, я советую не учить вывод, но прочитать его и запомнить, как формула выводится. Даже если вы не сумеете повторить его на экзе, вы расскажете препу, что нужно делать для вывода формула. Я бы на месте экзаменатора такое бы оценил бы в пол-вывода.

Понеслась!

Схема двухволновой интерференции.



Уравнение двухволновой интерференции

$$I = \langle (\vec{E}(t))^2 \rangle = I_1 + I_2 + 2\langle \vec{E}_1(t)\vec{E}_2(t) \rangle$$

Если E_1 и E_2 меняются гармонически и монохроматически, то

$$I = \frac{A^2}{2} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos[k_0(r_2 - r_1)],$$

где $I_1 = a_1^2/2$; $I_2 = a_2^2/2$. Величина $r_2 - r_1$ называется *разностью хода*.

С волновым вектором часто работать неудобно, а удобней работать с частотой. Так что эту формулу можно переписать, воспользовавшись равенством $k \cdot \text{разность длин} = \omega \cdot \text{разность времён хода}$ (обозначим её за $\Delta\tau$ или τ , она нам будет часто встречаться):

$$I = \frac{A^2}{2} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos[\omega \cdot \Delta\tau],$$

Двухлучевая схема Юнга в дальней зоне для монохроматического света – это самый баян, который вам рисовали ещё в школе. Но понимать его, возможно, начали только сейчас. В моём случае было именно так. Помните?

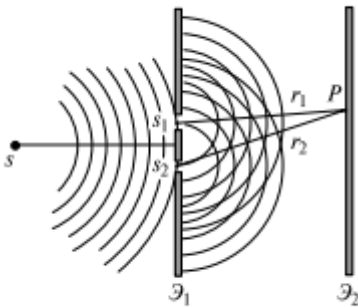


Рис. 8.2

Напомним, что будет на экране в случае монохроматического света: разность хода по теореме Пифагора, учитывая, что расстояние между E_1 и E_2 много больше поперечных размеров колец на E_2 , и по приближённой формуле легко получить

$$I(x) = 2I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda_0} \frac{x}{L}\right) \right].$$

Или, графически,

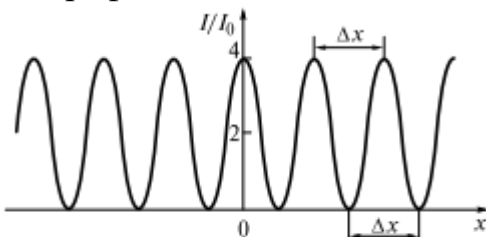


Рис. 8.6

Бесконечное число полос одинаковой интенсивности будет. Ляпота. Но стоит нам сделать свет немонохроматичным, как ляпота пропадёт.

Интерференция от прямоугольного спектра частот (уже не дельта-функции, как это было в случае монохроматического света).

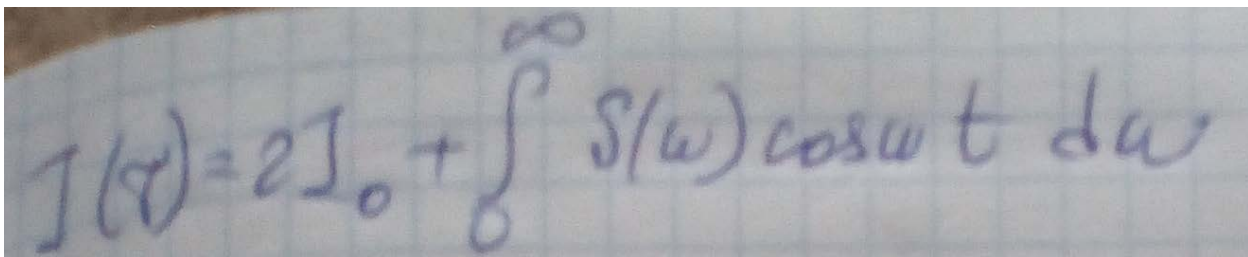
Нам будет удобнее в качестве аргумента взять не разность длин хода, а разность времён хода, чтобы вместо волнового вектора работать с частотой. Приведём вывод интерферограммы.

(начало вывода)

Вспомним формулу

$$I = \frac{A^2}{2} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos[(\varphi_1 - \varphi_2) + \omega \cdot \Delta\tau],$$

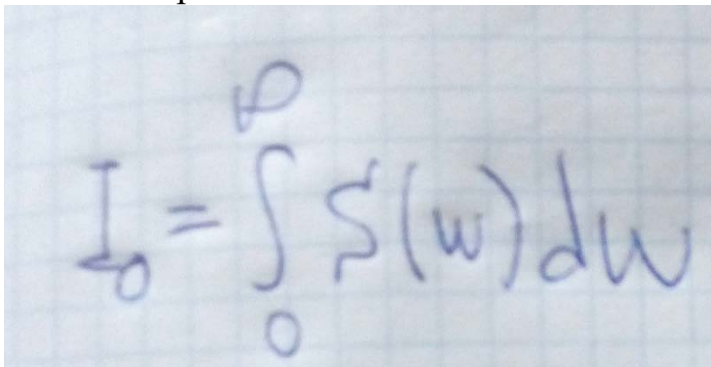
В данном случае $I_1 = I_2 = I_0$, разность фаз нулевая (колебания поля в двух дырках синфазные). Так что получаем


$$I(\tau) = 2I_0 + \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega t d\omega$$

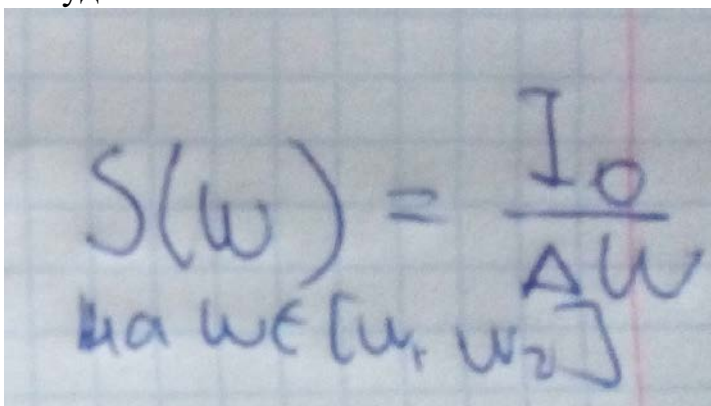
(тут описка – не t, а τ)

Так как $S(\omega)$ – это прямоугольный барьер, то $S(\omega)$ равна нулю при $\omega < \omega_1$ и $\omega > \omega_2$ (левая и правая граница), а между ними она равна константе... какой?

Вспомним равенство:


$$I_0 = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega$$

Откуда


$$S(\omega) = \frac{I_0}{\Delta\omega}$$

на $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$

$$(\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1)$$

Подставляем:

$$2I_0 + \frac{I_0}{\Delta\omega} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos(\omega\tau) d\omega =$$
$$= 2I_0 + \frac{I_0}{\Delta\omega\tau} \int_{\omega_1\tau}^{\omega_2\tau} \cos(\alpha) d\alpha =$$

Применяем формулу Ньютона-Лейбница:

$$= 2I_0 + \frac{I_0}{\Delta\omega\tau} \sin\alpha \Big|_{\omega_1\tau}^{\omega_2\tau} =$$

Подставляем границы:

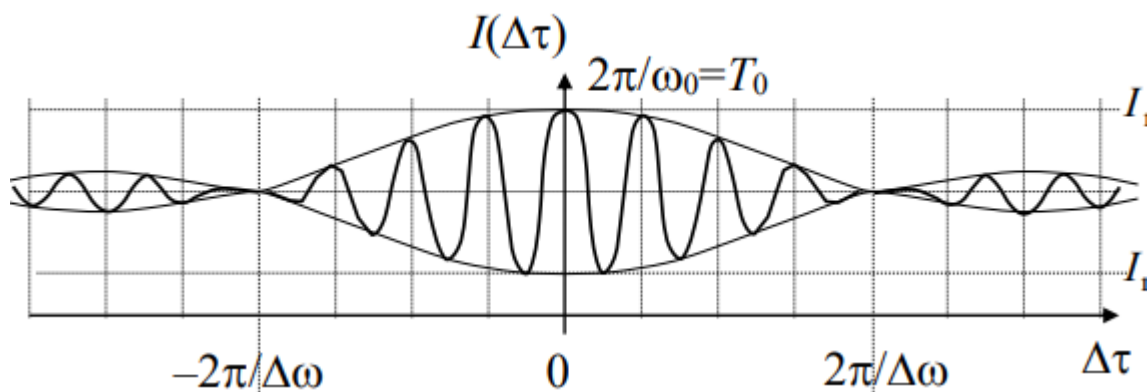
$$= 2I_0 + \frac{I_0}{\Delta\omega\tau} [\sin\omega_2\tau - \sin\omega_1\tau]$$
$$= 2 \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\tau\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\tau\right)$$

И пользуемся формулой разности синусов. Хм, у нас $\sin(\Delta\omega\tau)$ делится на $\Delta\omega\tau$. Это и есть sinc.

Конец вывода)

Зависимость интенсивности от разности времён хода τ есть

$$2I_0 + 2I_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega\tau}{2}\right) \cos(\omega_0\tau).$$



Давайте по этому графику прикинем, что мы увидим. Пойдём по оси абсцисс направо (чем больше разность времён хода, тем дальше мы уходим от центра, так что по сути мы идём от центра интерферограммы по радиусу). Максимум, минимум, максимум, минимум, максимум... но картина начнёт размываться из-за *sinc*: максимумы и минимумы становятся всё более близкими по интенсивности. В критической точке $2\pi/\Delta\omega$ (времени когерентности) они вообще сольются. Потом восстановятся, но опять-таки, из-за *sinc* они будут всё сильнее и сильнее сливаться, и так будет до $4\pi/\Delta\omega$, где они опять сольются...

Величина $2\pi/\Delta\omega$ называется временем когерентности. Это её определение!

Т.е. определение длины когерентности – скорость света * $2\pi/\Delta\omega$.

Физический смысл времени когерентности – максимальная разность времён хода, при которой... и тут хочется сказать «интерференция ещё наблюдается». Это некорректно, лучше сказать: МИНИМАЛЬНАЯ разность времён хода, при которой минимумы сливаются с максимумами.

Поясню: потому что именно вблизи $2\pi/\Delta\omega$ аргумент *sinc* близок к 0 и второй множитель $\cos(\omega_0 t)$, который и вызывает частые колебания (вызывающие интерференцию), погоды не вносит.

Взгляните ещё раз на картинку $I(\tau)$: при разностях времён хода $>2\pi/\Delta\omega$ *sinc* вновь становится больше равен, второй множитель $\cos(\omega_0 t)$, по-прежнему вызывает частые колебания, аргумент *sinc* велик, но всё же не 0, поэтому максимумы и минимумы мы видим.

При разности времён хода $4\pi/\Delta\omega$ опять *sinc* даст 0 и вновь минимумы и максимумы пропадут, а потом возродятся. Правда, их амплитуда будет ещё меньше: *sinc* будет её уменьшать.

А вот если вы в определении времени когерентности скажете «максимальная разность времён хода, при которой интерференция ещё наблюдается», тут вас и подловят. Максимумы и минимумы видны при любой разности хода (см. ещё раз график), кроме тех точек, где *sinc* как раз обращается в 0.

Майкельсон ввёл функцию видности. По определению это

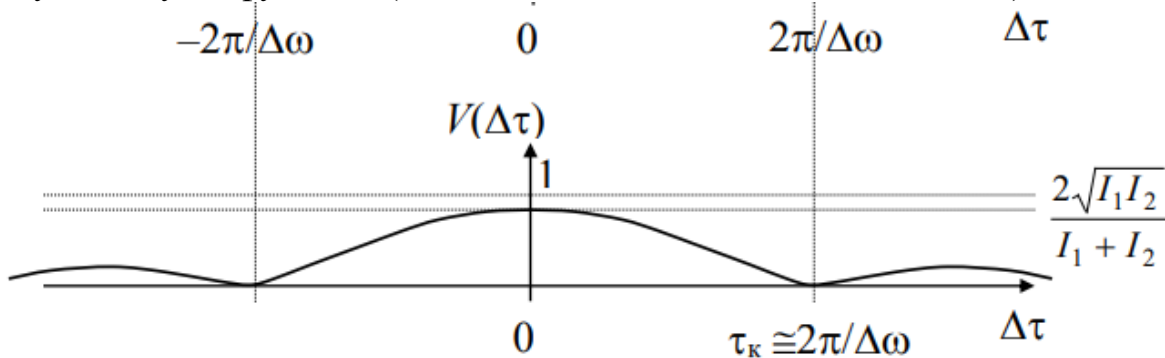
$$V(\Delta\tau) \equiv \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

Вообще говоря, график $V(\Delta\tau)$ не будет непрерывным, а будет представлять собой «ступеньки» шириной, равной расстоянию между соседними максимумами. Однако её часто аппроксимируют непрерывной кривой, что мы увидим в дальнейшем: как правило, ширина от центра интерферограммы до первого размытия много больше расстояния между соседними максимумами, где такая аппроксимация ещё имеет смысл.

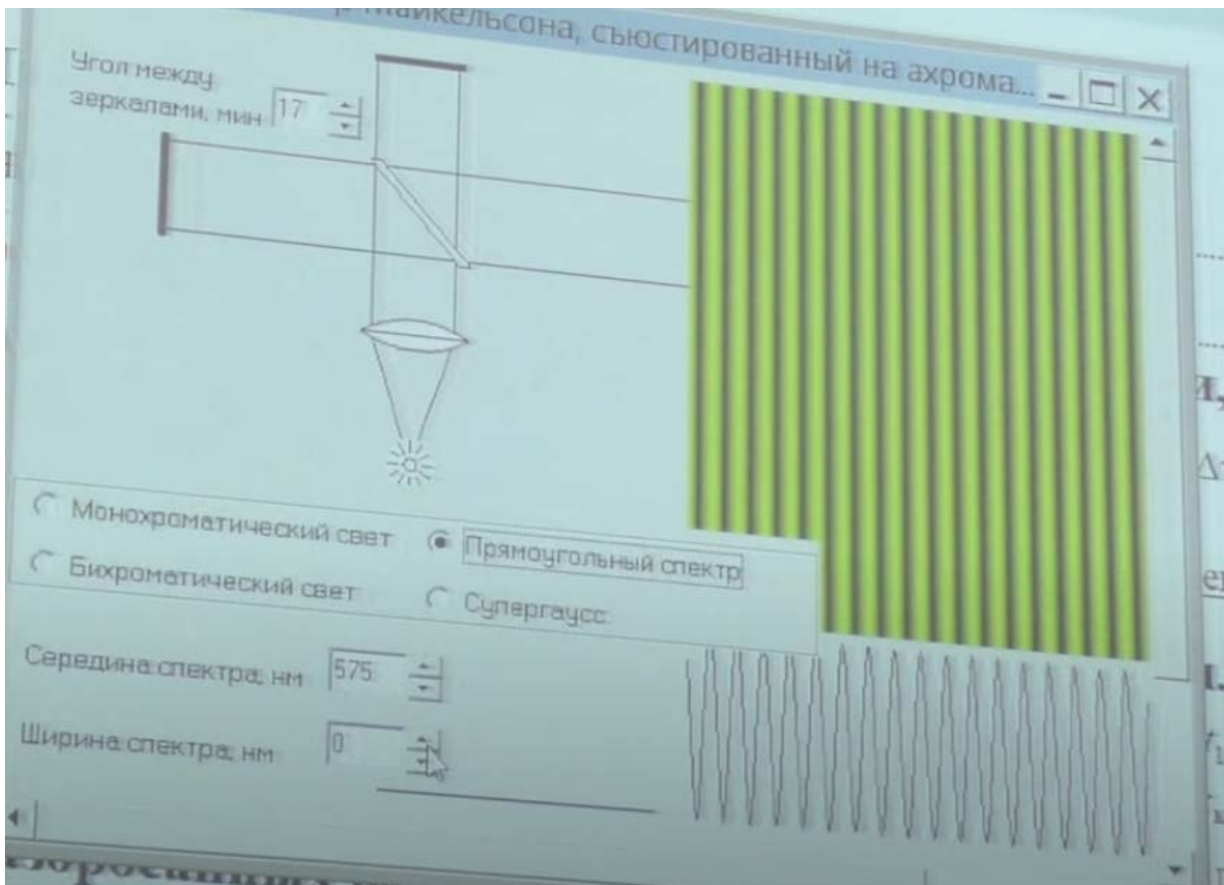
В данном эксперименте (с двумя щелями и прямоугольным спектром) функция видности имеет вид

$$V(\Delta\tau) \equiv \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega\Delta\tau}{2}\right) \right|.$$

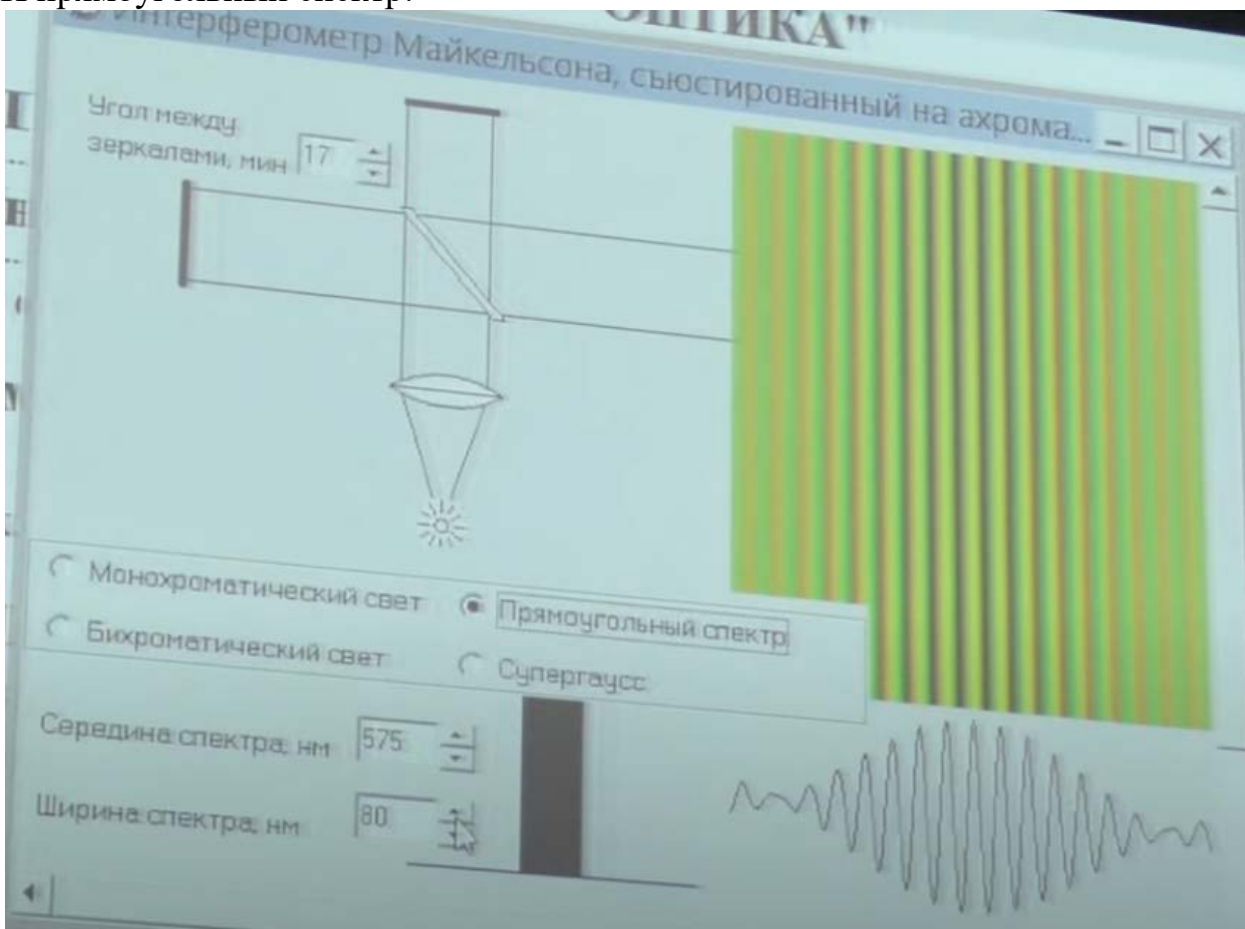
И её график. Надо понимать, что этот синк приближённо аппроксимирует «ступенчатую» функции (см. мой спич, когда я вводил видность).



Давайте ещё для иллюстрации посмотрим картинки компьютерной модуляции.
Монохроматический свет:



И прямоугольный спектр:



Сравните графики в правом нижнем углу! Видите домножение на sinc? Ну вот.

Оценки. Обратите внимание: чем меньше $\Delta\omega$, т.е. чем больше монохроматичен свет, тем больше время и длина когерентности и больше полос мы будем наблюдать!

Оценка

времени когерентности – τ_k ,

длины когерентности – l_k ,

максимального порядка интерференции – m_{\max} :

$$\tau_k \cong m_{\max} T_0 \cong \frac{\omega_0}{\Delta\omega} T_0 \cong \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda} T_0,$$

$$l_k \cong m_{\max} \lambda_0 \cong \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \lambda_0 \cong \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda} \lambda_0,$$

$$m_{\max} \cong \frac{\tau_k}{T_0} = \frac{l_k}{\lambda_0} \cong \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \cong \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda}.$$

Источник света	λ_0 , мкм	$\lambda_0/\Delta\lambda$	m_{\max}	τ_k , с	l_k
Солнечный свет	~0.5	~1.7	~2	$3 \cdot 10^{-15}$	~1 мкм
Фильтр	~0.5	10	10	$2 \cdot 10^{-14}$	5 мкм
Ртутная лампа	~0.3	10^5	10^5	10^{-10}	3 см
He-Ne лазер (одномодовый режим)	~0.6	до 10^{13}	до 10^{13}	до $2 \cdot 10^{-2}$	до $6 \cdot 10^6$ м

Функция корреляции. Пока действительная.

Скажу честно, что это не имеющая особого значения хрень, но она есть в билетах. Ну я же предупреждал, что здесь будет куча бесполезных величин, которые мы будем вводить, обсасывая по двадцать раз одну формулу?

Давайте вернёмся к этой формуле

и представим, что эти два источника – это два источника одной амплитуды и фазы с разностью хода до конечной точки τ . Тогда

$$I(\tau) = \overline{E_{1+2}^2} = I_0 + I_0 + 2\overline{E(t)E(t+\tau)}.$$

(черты – усреднение по времени)

Третье слагаемое, поделённое пополам (которое как раз и вызывает интерференцию)

$$B(\tau) = \overline{E(t)E(t + \tau)}$$

Вот это говно и называется функцией корреляции.

Обратите внимание, что она от t не зависит (из-за усреднения по времени), а зависит только от разности времён ходов τ .

Связана к спектральной плотностью интенсивности

$$B(\tau) = \int_0^{\infty} S(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega.$$

Или, преобразованием Фурье

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau.$$

Собственно, именно так в эксперименте и получают спектральную плотность: получают интерферограмму, функцию корреляции :

$$B(\tau) = \frac{I(\tau)}{2} - I_0$$

и из неё уже S .

Если вам попадётся в билетах Фурье-спектроскопия (а она там есть), вот это пишете: проводим интерференцию, считаем функцию корреляции, а из неё спектральную плотность интенсивности. Желательно с формулами.

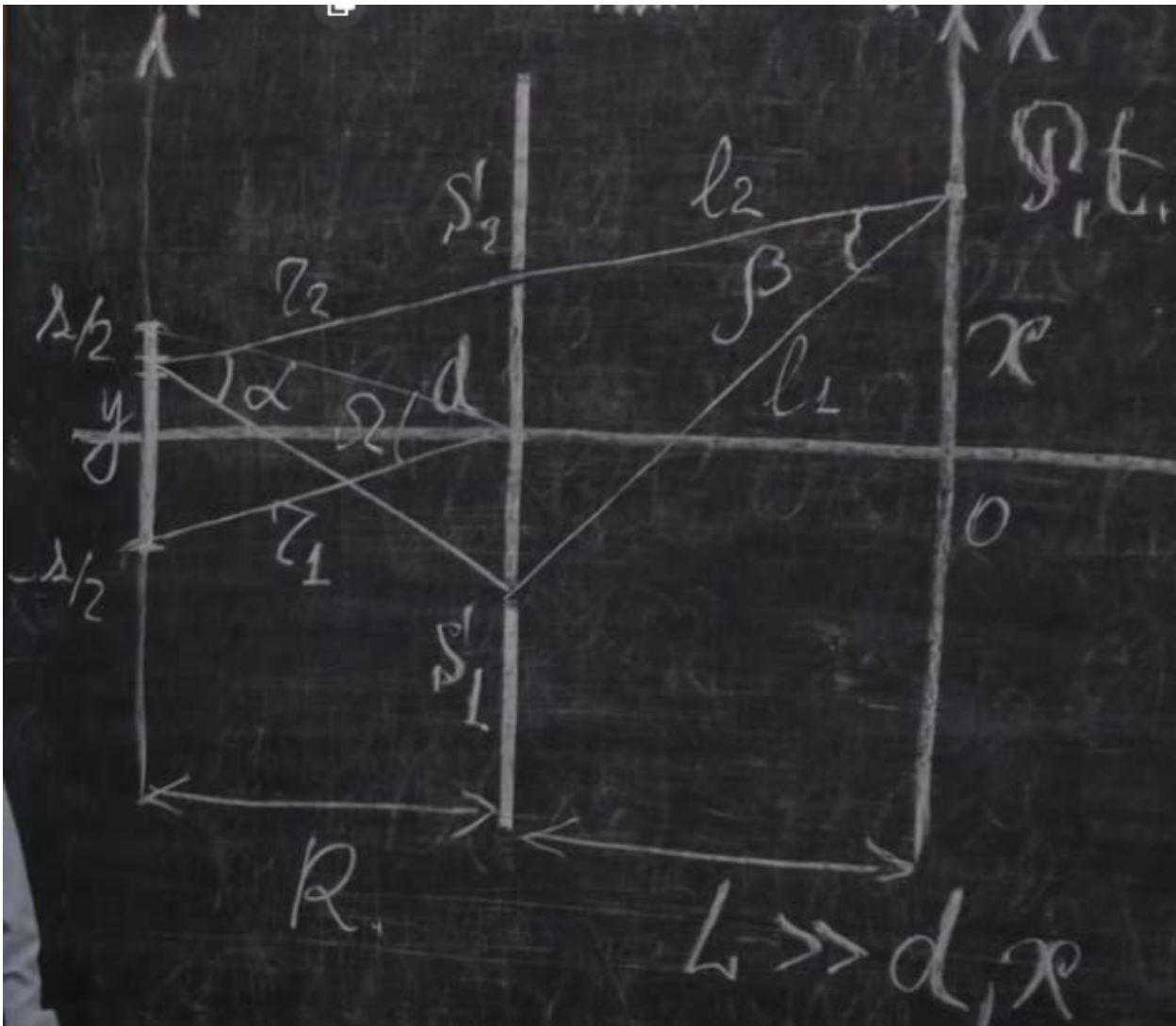
Теорема Винера-Хинчина – это то же самое, но записанное немного иначе – не через косинус, а мнимую экспоненту.

Пространственная когерентность. Что может помешать нам видеть нашу нелюбимую... ой, а мы же к экзамену готовимся, там нельзя так говорить. Нашу любимую интерференцию что нам помешать видеть?

Да, немонахроматичность света. Но ещё и если источник будет не точечный, а протяжённый.

Рассмотрим двухщелевую схему Юнга, в которой на этот раз источник будет протяжённый - в виде светящейся палки. Ну лампу вытянутую все себе представили?

Смотри картинку:



Слева – как раз источник, на раз этот длиной s .

(начало вывода

Разобьём его на множество мелких толщиной dy . Будем считать, что все эти мелкие источники излучают волну на одной частоте, но на произвольных фазах (как будто каждый источник ничего не знает о соседних). Тогда, раз фазы произвольные, интерференции от множества этих источников не будет, и мы можем не считать E от каждого, суммировать и брать квадрат, а сразу найти интенсивности от каждого источника и затем их просуммировать.

Разность фаз тогда запишется как

$$\Delta\varphi = k \cdot (\alpha y + \beta x)$$

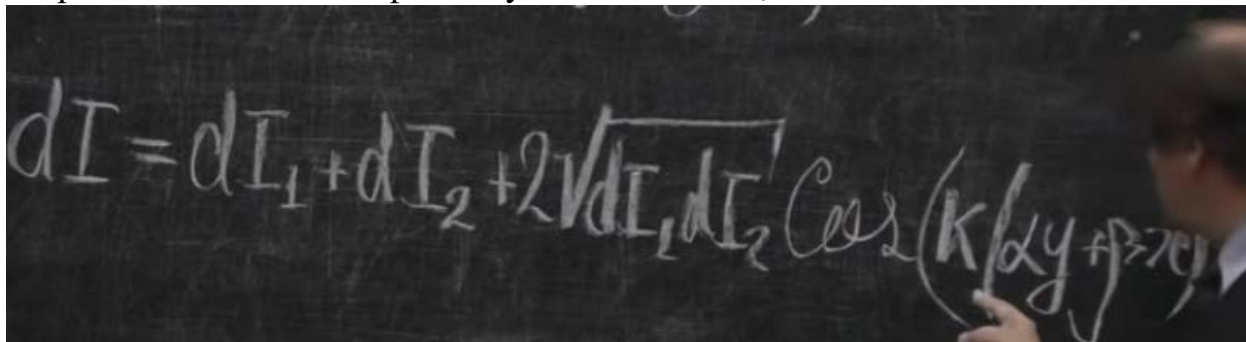
(определения углов альфа и бета видны на рисунке).

Поясню: $\alpha y + \beta x$ – разность ходов, домножив на волновое число, получили разность фаз.

Тогда вспоминаем формулу

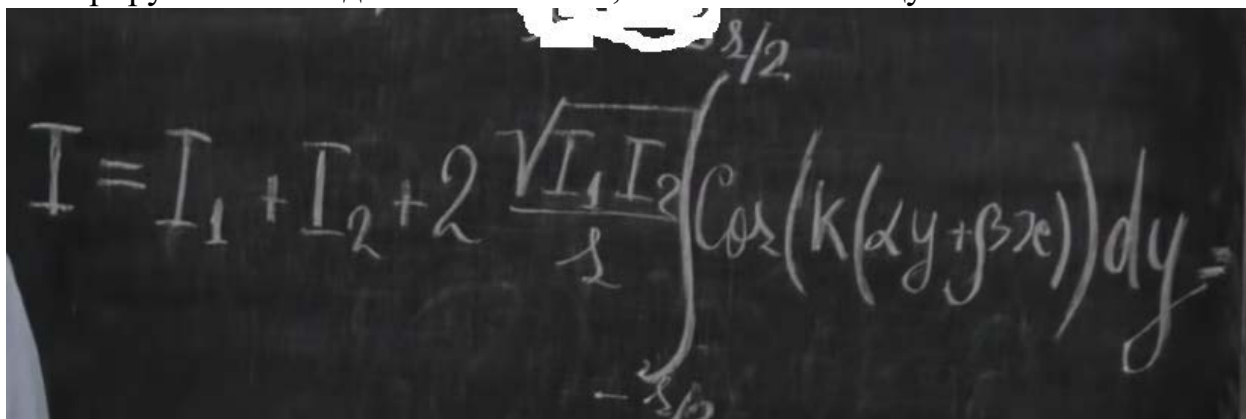
$$I = \frac{A^2}{2} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos[k_0(r_2 - r_1)],$$

где $I_1 = a_1^2/2$; $I_2 = a_2^2/2$. Величина $r_2 - r_1$ называется *разностью хода*.
И применяем. Разность фаз мы уже подсчитали, подставляем:



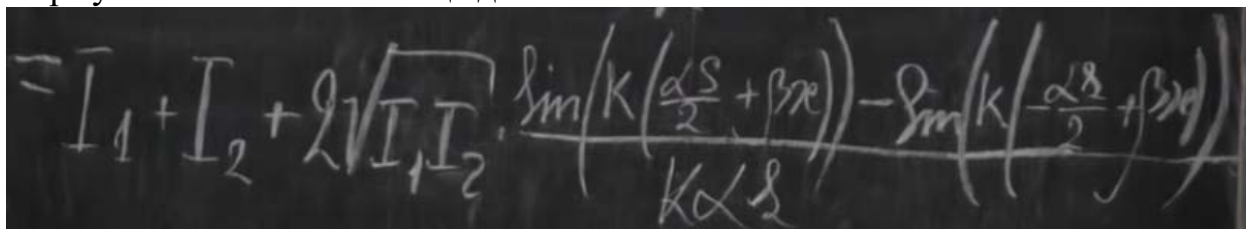
$$dI = dI_1 + dI_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(k(\alpha y + \beta x))$$

Это мы подсчитали вклад от источника с длиной dy и ординатой y . Теперь интегрируем по всей длине источника, чтобы найти общую интенсивность:



$$I = I_1 + I_2 + 2 \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{s} \int_{-s/2}^{s/2} \cos(k(\alpha y + \beta x)) dy$$

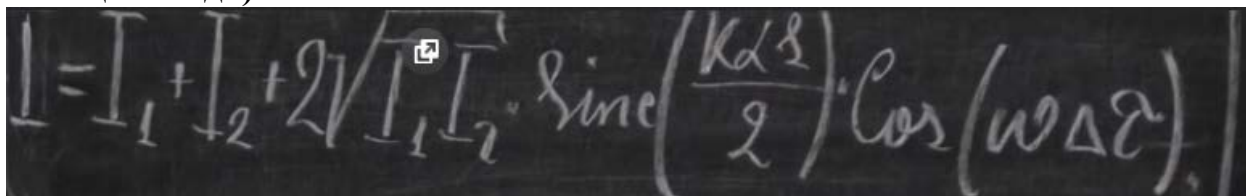
Формула Ньютона-Лейбница даёт:



$$= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \frac{\sin(k(\frac{\alpha s}{2} + \beta x)) - \sin(k(-\frac{\alpha s}{2} + \beta x))}{k\alpha}$$

Применяя формулы разности синусов, и получаем:

Конец вывода)



$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \operatorname{sinc}\left(\frac{k\alpha s}{2}\right) \cos(\omega \Delta \tau)$$

Так, множитель $\cos(\omega \Delta \tau)$ – это наш старый знакомый... а с ним припёрся ещё один sinc. Где-то мы уже такое видели...

$$I(\tau) = 2I_0 + \frac{I_0}{\Delta\omega} 2 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos(\omega\tau) d\omega = 2I_0 + 2I_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega\tau}{2}\right) \cos(\omega_0\tau).$$

А, ну вот. Только вместо $\Delta\omega \cdot \tau$ теперь $k \cdot \alpha \cdot s$.

А функция видности в этом случае будет

$$V(\alpha, s) = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \left| \sin\left(\frac{k\alpha s}{2}\right) \right|$$

Давайте напишем неравенство: α настолько мало, что аргумент $\sin\alpha$ всегда больше нуля (т.е. напишем неравенство на такие углы α , при которых интерференционная картина не будет прерываться областями размытия.

Синк станет равным 0 первый раз, когда его аргумент станет равным π , откуда

$$\frac{k\alpha s}{2} < \pi$$

Заменим волновой вектор на длину волны:

$$\frac{\alpha s}{\lambda} < 1$$

Подставим $\alpha = d/R$ (см. рисунок)

$$\frac{d \cdot s}{R \cdot \lambda} < 1$$

Или же

$$d < \frac{R\lambda}{s} = \frac{\lambda}{\Omega}$$

То же самое условие через угол Ω (см. рисунок). Он называется угловой апертурой. Эта величина λ/Ω называется радиусом или шириной когерентности.

Аналогично вводится угол когерентности:

$$\Omega < \frac{\lambda}{d} = \Omega R.$$

Из наших неравенств Русаков ещё предлагает выжать максимальный поперечный размер нашего источника (лампы), который равен s , при котором интерференция ещё наблюдается, причём в области, где аргумент $\sin ca$ ещё меньше 2π .

$$s < \frac{R\lambda}{d} = \frac{\lambda}{\alpha} = s_{\max}$$

И аналогично максимальный угол, при котором наблюдается интерференция (так же в области, где аргумент $\sin ca$ ещё меньше 2π).

$$\alpha < \frac{\lambda}{s} = \alpha_{\max}$$

Что отсюда надо запомнить? Естественно, запоминать эти 100500 неравенств не нужно, при необходимости они выводятся. Нужно запомнить

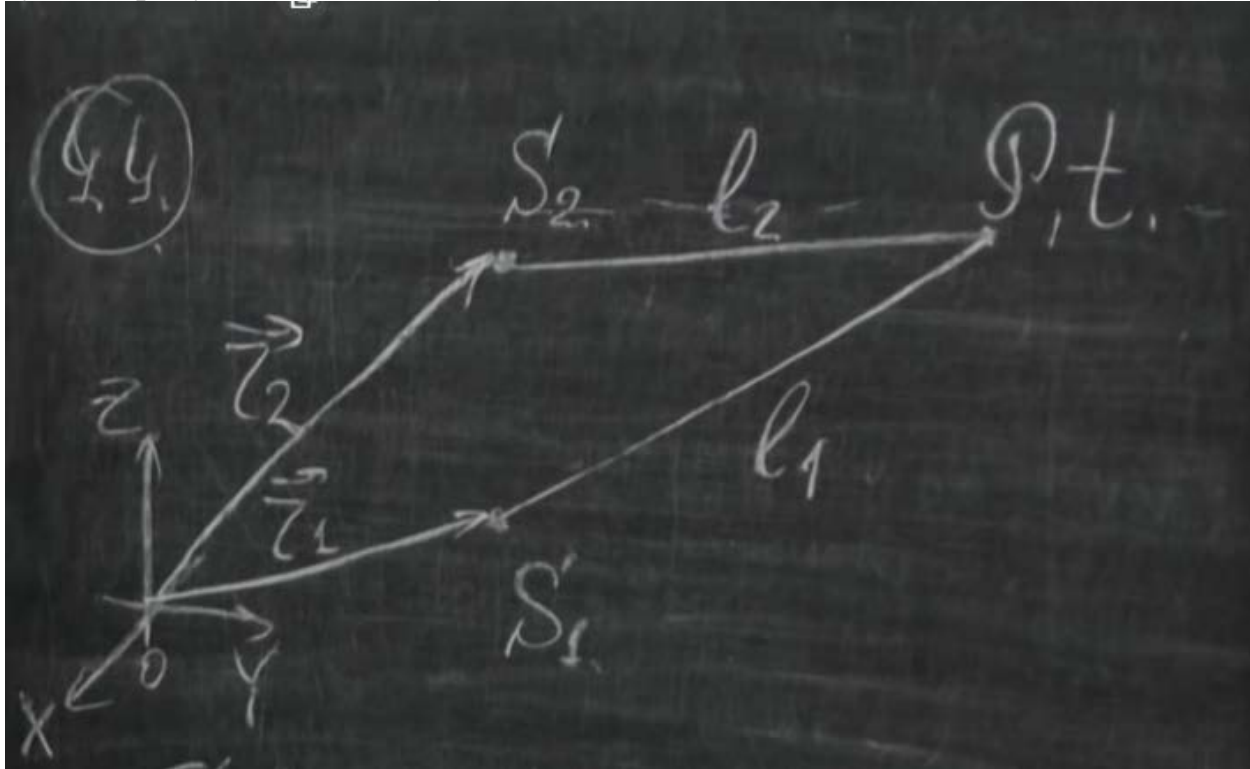
А) картинку

Б) Формулу для интенсивности. Так как в неё входит угол α , то его место на картинке запомнить особенно.

Остальное, как уже было сказано, при необходимости выведется.

Пространственно-временная когерентность и степень когерентности. Помните, как в начале темы я сказал, что мы здесь по двадцать раз обсаживаем одни и те же формулы и вводим бесполезные физические величины? Что мы и сделаем в этом пункте!

Русаков рисует такую схему



Далее Русаков считает интенсивность в конечной точке. Обозначая через E_1 и E_2 напряжённости в точках S_1 и S_2 , (комплексные с учётом фазы), он выводит

$$= I_1 + I_2 + \text{Re} \langle \hat{E}_1(t_1) \hat{E}_2^*(t_2) \rangle$$

Где третье слагаемое – функция корреляции Γ_{12} – усреднение по времени от произведения двух напряжённостей.

Если сигнал гармонический, то Γ_{12} – функция лишь времени задержки τ , так в результате усреднения по периоду пропадёт зависимость от времени t .

Дальше Русаков вводит новую бесполезную физическую величину – степень когерентности:

$$\gamma_{12}(\Delta\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\Delta\tau)}{2\sqrt{I_1 I_2}} = \frac{1}{2I_0} \Gamma(\Delta\tau)$$

Это безразмерная физическая величина, характеризующая, а насколько у нас вообще хорошая интерференция – насколько монохроматичен свет, насколько источник мал. У Русакова есть интересная картинка на этот счёт:

Стационарное, однородное и изотропное световое поле

Рассмотрим стационарное (во времени), однородное и изотропное (в пространстве) световое поле, когда расположение вторичных источников достаточно будет охарактеризовать только расстоянием между вторичными источниками вдоль фронта волны $d = |r_1 - r_2|$. В этом случае получим:

$$\Gamma_{12}(\Delta\tau) = \Gamma(\Delta\tau, d) = \langle A(r)A^*(r + \Delta\tau, d) \rangle e^{-i\omega_0\Delta\tau}$$

$$\gamma_{12}(\Delta\tau) = \gamma(\Delta\tau, d) = \gamma(\Delta\tau, d) e^{-i(\omega_0\Delta\tau + \Psi(\Delta\tau, d))}$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \gamma(\Delta\tau, d) \cos(\omega_0\Delta\tau + \Psi(\Delta\tau, d))$$

$$V(\Delta\tau, d) = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \gamma(\Delta\tau, d)$$

При $d = 0$ получим комплексную функцию временной когерентности – $\Gamma(\Delta\tau)$ и степень временной когерентности – $\gamma(\Delta\tau)$.

При $\Delta\tau = 0$ получим комплексную функцию пространственной когерентности – $\Gamma(d)$ и степень пространственной когерентности – $\gamma(d)$.

Для определения степени временной когерентности надо осуществить двухволновую интерференцию путем деления амплитуды волны, то есть взять волны от одной точки исходного волнового поля (при $d = 0$). Далее внести управляемое время задержки $\Delta\tau$, измерить интенсивность интерференционной картины $I(\Delta\tau)$, получить функцию видности $V(\Delta\tau)$ (в частности определить

Обратите внимание на график снизу. Когда свет идеально монохроматичен, а источник точечный, степень когерентности 1. Лишь что-то из них не идеально – степень когерентности уже не 1. Может быть неидеально ни то, ни другое – ну и степень когерентности нас своей величиной тут не порадует.

Интерференционные схемы. Бипризмы и прочая ересь.

Как вы знаете, существует чуть более, чем дофига интерференционных схем. Они делятся на два типа:

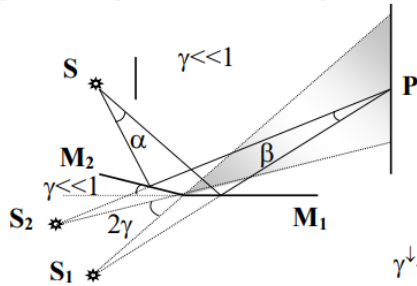
1) метод деления амплитуды. Амплитуда делится, когда часть света проходит, часть света отражается на границе сред, так что именно эту черту можно считать принадлежностью схемы к классу «метод деления амплитуды».

Пример: интерферометр Майкельсона (да, этот чёртов 135-й прак).

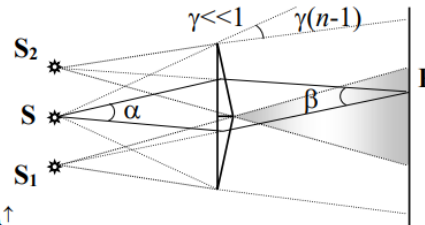
) с делением волнового фронта. Подобных схем гораздо больше. Со многими из них вы наверняка сталкиваясь, решая (или, если вы нормальный человек – списывая) задачи по оптике. Давайте сделаем так: я не буду вдаваться в то, как такие схемы считаются, а просто покажу картинку, и вы зрительной памятью всё это запомните и нарисуете на эссе?

Метод деления волнового фронта

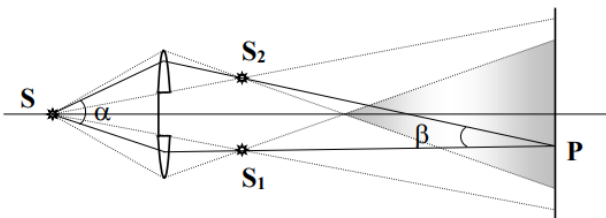
Бизеркало Френеля
Французский физик Огюстен Жан Френель, 1816 г.



Бипризма Френеля
Французский физик Огюстен Жан Френель, 1819 г.

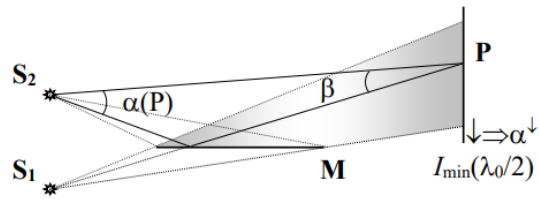


Билинза Бийе



Зеркало Ллойда

Ирландский физик Хэмфри Ллойд, 1837 г.



Противоречивые требования – $\alpha^\downarrow(s^\uparrow)$, $\beta^\uparrow(P \rightarrow S_1, S_2)$.

Особенности – поле интерференционной картины мало и малоинтенсивно.

Бизеркало Френеля – взяли одно зеркало, взяли другое, приставили их под углом.

Бипризма Френеля – равнобедренная призма.

Билинза Бийе – взяли линзу, поделили пополам и раздвинули половины.

Зеркало Ллойда – лучи падают на зеркало под малым углом между лучами и плоскостью зеркала, отражаются и интерферируют с исходными лучами.

Запомнили? Поехали дальше.

Рассмотрим ещё одну важную баянную схему:

Прохождение света через плоско-параллельную пластину.

Возможно, тоже было у вас в школе, у автора было, он тогда ничё не понял.

Итак, картинка:



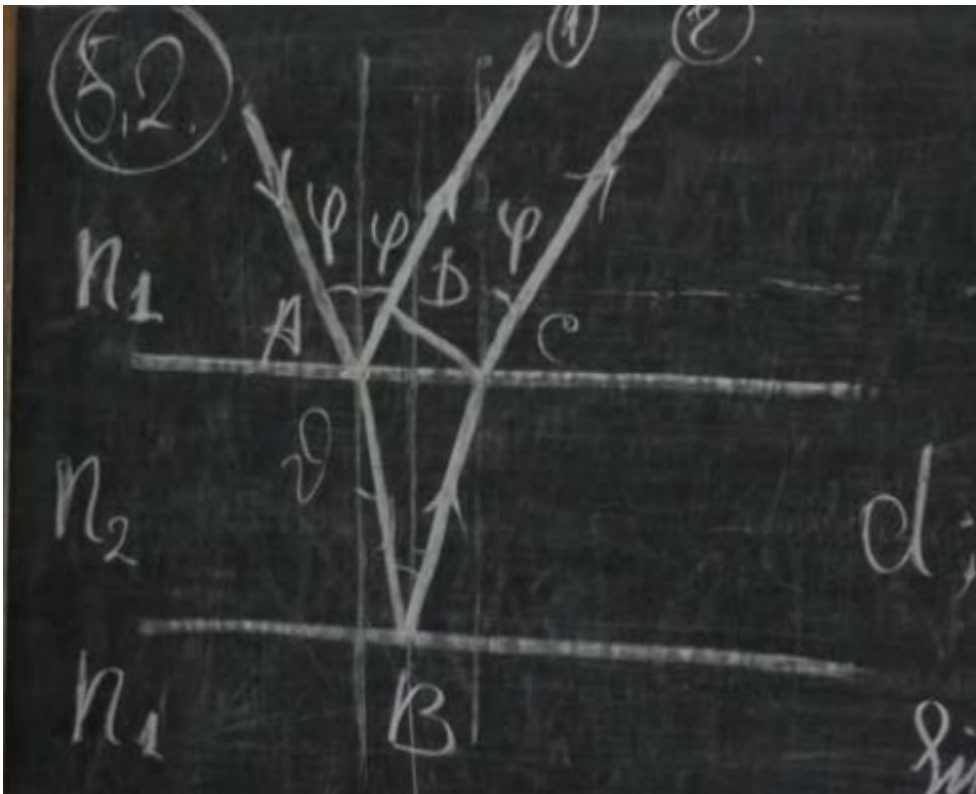
Вячеслав Серафимович, конечно, очень интересный человек, который на самом деле очень интересно и понятно читает (без шуток), но нас всё же интересует схема в левой половине фотки. Пластина толщиной d имеет показатель преломления n_2 , на неё из среды n_1 падает луч под углом φ . Также введём угол θ (см. рисунок)
Замечание. Мы пренебрегли прохождением света из среды 2 в среду 1 на нижней границе и отражением света, когда он выходил из среды в 2 в среду 1 на верхней границе. Мы учтём, что будет, если НЕ пренебрегать, в следующем пункте.

(начало вывода

Закон преломления нам здесь, конечно, по-любасу потребуется:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \theta} = \frac{n_2}{n_1}$$

Нас будет интересовать разность фаз двух вышедших лучей.



Разность фаз будет равна разности фазы луча 1, которая набежала на участке AD минус фазы луча 2, которая набежала на участках AB и BC.

Русаков, правда, вместе разности фаз считает оптическую разность длин хода.

Напомним отличие оптической разности длин хода от просто разности длин хода: в оптической разности длин хода фигурируют ещё показатели преломления.

Если её подсчитать, то получим

$$\left(2 \frac{dn_2}{\cos \psi} - n_1 \sin \varphi \cdot 2d \cdot \tan \psi \right)$$

Вынесем общий множитель:

$$\frac{2n_2 d}{\cos \psi} \left(1 - \frac{n_1}{n_2} \sin \varphi \cdot \sin \psi \right)$$

А после применения закона преломления получим ответ:

$$\Delta = 2n_2 d \cos \nu$$

Почти ответ. По говноформулам из говносложной темы «явления на границе раздела сред» при отражении от более плотной в менее оптически плотную среду набегают фаза π , поэтому ответ на самом деле

Конец вывода)

$$\Delta = 2n_2 d \cos \nu \pm \lambda/2$$

Ну и далее по классике: если это целое число длин волн – максимум, если полуцелое – соседние волны сложатся в противофазе и мы ничего не увидим.

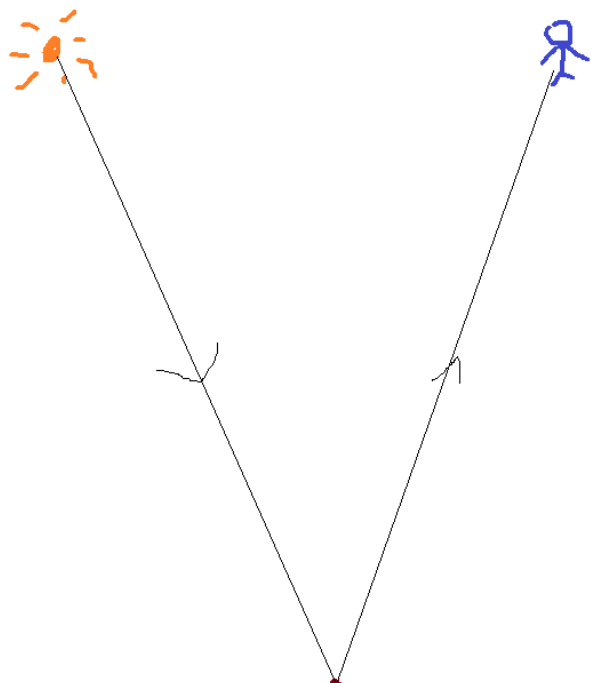
Кстати, а где будет наблюдаться интерференционная картина? Где нам поставить экран? Оказывается, что как можно дальше от пластины: раньше у нас лучи сходились в точку на экране, а теперь они параллельны. Как известно, параллельные прямые пересекаются...



Да погоди. Не надо бить меня этим учебником. Они пересекаются на бесконечности.



Вот да, как в проективной геометрии. А значит, что экран нам тоже нужно поставить далеко-далеко. Кстати, источник света желательно тоже подальше убрать: он же пошлёт на нашу пластину не один луч, а дофига. Если он будет рядом, то они будут падать под разными углами – не айс, в нашей задаче есть только φ . А вот если поставить и источник далеко-далеко, то с достаточно хорошей точностью они будут падать под одним углом φ на нашу пластину.



(размеры пластины малы по сравнению с расстояниями до источника света и приёмника в виде второкура на праке).

Ну или, как варик, источник может и близко, но это должен быть лазер, который даёт узкий пучок-волновый фронт.

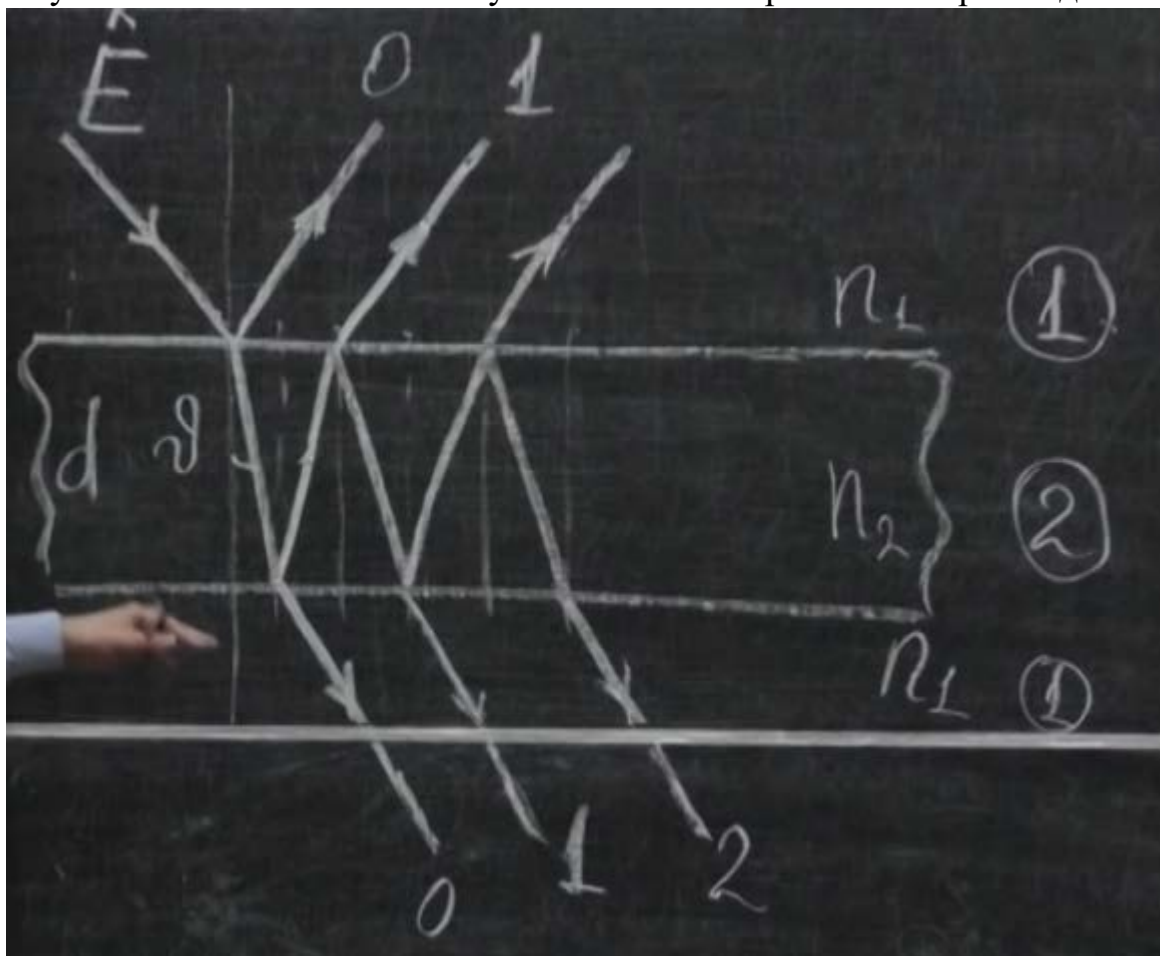
Многоволновая интерференция и формула Эйри.

До сих пор речь шла об интерференции, полученной в результате наложения двух волн: свет прошёл две дырки и вновь воссоединился в какой-то точке, вот тебе и две волны.

Теперь рассмотрим интерференцию от числа волн, больше двух.

Отметим особенность двухволновой интерференции: Мы получали периодическую картину благодаря $I(\tau)$ пропорционально $\cos(\Delta\omega \cdot \tau)$ (ну ещё sinc там свои коррективы вносил), ну и тогда там легко считается период. В многоволновой такого не будет: полосы между максимумами будут находиться на разном расстоянии, а не на одинаковом!

Одним из самых простых примеров является обычная плоскопараллельная пластина, но уже на максималочках: мы учитываем все отражения и прохождения.



Кажется, тут даже ничего не надо комментировать: часть прошла вниз, часть отразилась вверх, часть прошла вниз, часть отразилась вверх, и т.д.

Задача, которую мы будем сейчас решать: зная интенсивность, получить интенсивность волны отражённой и волны прошедшей. Начнём с прошедшей.

На рисунке, обратите внимание, мы ввели толщину пластины d и угол θ .

Нам потребуется ввести некоторые новые коэффициенты:

t_{12} – коэф пропускания из среды 1 в среду 2. Представим себе, что на границу сред из среды 1 падает волна с амплитудой E . Тогда внутрь пройдёт волна с амплитудой $E \cdot t_{12}$.

t_{21} – коэф пропускания из среды 2 в среду 1, вводится аналогично.

r_{12} – коэф отражения из среды 1 в среду 2. Представим себе, что на границу сред из среды 1 падает волна с амплитудой E . Тогда от границы сред отразится волна с амплитудой $E \cdot r_{12}$.

r_{21} – коэф отражения из среды 2 в среду 1, вводится аналогично.

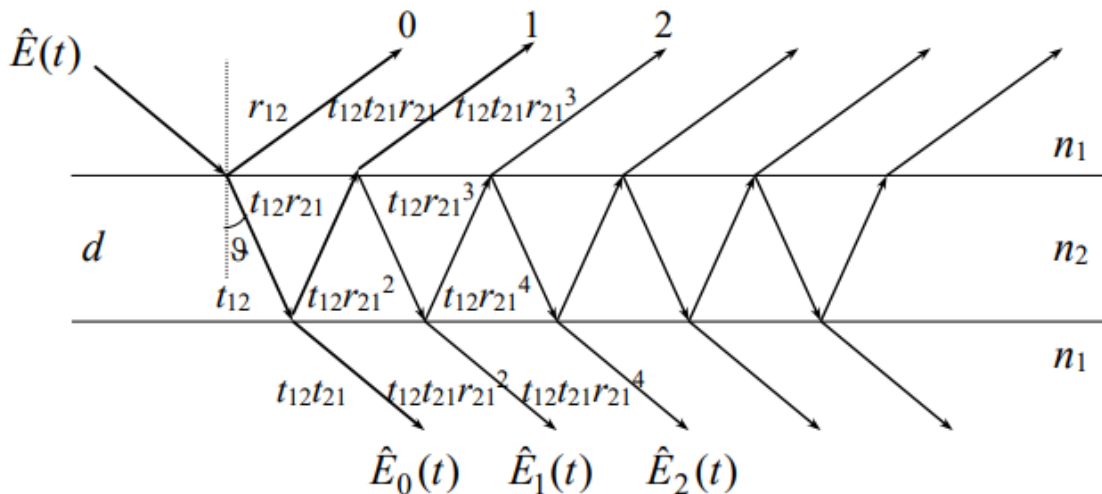
И ещё два коэф. Ниже – самый общий случай, когда они комплексные (т.е. мы в них «запихнули» ещё набег фазы). В данном случае будем считать их действительными, и более того, $r_{12}=r_{21}$, $t_{12}=t_{21}$

$$R = |r_{12}|^2 = |r_{21}|^2$$

$$T = |t_{12} t_{21}|^2$$

(начало вывода. Он будет длинным, если чё.

Получаем вот такую картинку красивую:



Заметим, что набег фазы за одно прохождение света через всю пластину (не важно, вверх или вниз) одинаков и равен

$$\varphi = k_0 n_2 \frac{d}{\cos v} = \frac{2\pi d}{\lambda \cos v}$$

Теперь давайте найдём амплитуду и фазу первой прошедшей волны. Напомним, что Русаков комплексные величины обозначает галочками. Не слишком удачное обозначение (галочки лучше оставить операторам, а комплексные величины обозначать волной), но что уж

$$\hat{E}_0 = \hat{E} t_{12} e^{-i\varphi} t_{21} =$$

Сначала на верхней границе раздела сред нам надо домножить на первый коэф пропускания, потом во время прохождения возникнет сдвиг фазы, ну и ещё домножим на коэф пропускания на выходе.

Произведение двух маленьких тэшек – это T, поэтому

$$\hat{E}_0 = \hat{E} t_{12} e^{-i\varphi} t_{21} =$$

$$= \hat{E} e^{-i\varphi} T$$

Теперь подсчитаем вторую волну. Выразим её сразу через E_0 . Не учитывая пока набег фазы, подсчитаем амплитуду: нам нужно дважды домножить на r за счёт двух отражений (или один раз домножить на R). На t лишний раз домножать не надо: как и луч 0, как и луч 1, (как и все прошедшие лучи) прошли сквозь границу сред два раза. А теперь займёмся разностью хода E_1 относительно E_0 . Чтобы не считать заново, воспользуемся результатом предыдущей задачи. Там у нас была оптическая разность хода:

$$\Delta = 2n_2 d \cos \nu$$

Чтобы перевести её в разность фаз лучей 0 и 1 (которую мы обозначим за Φ), домножим на волновое число k. Получим

$$\Phi = k \cdot \Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} 2n_2 d \cos \nu = \frac{4\pi n_2 d}{\lambda} \cos \nu$$

Аналогично

$$\hat{E}_2 = \hat{E}_1 \cdot R \cdot e^{-i\varphi}$$

Это позволяет нам перейти от рекуррентной формулы к обычной:

$$\hat{E}_k = \hat{E}_0 \cdot R^k \cdot e^{-ik\varphi}$$

Чтобы найти общую E , просуммируем все прошедшие волны:

$$\begin{aligned} \hat{E}_{\text{пр}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \hat{E}_0 \cdot (R \cdot e^{-i\varphi})^k = \\ &= \hat{E}_0 \cdot e^{-i\varphi} \cdot \frac{1}{1 - R \cdot e^{-i\varphi}}; \end{aligned}$$

На второй строчке мы поставили E_0 и воспользовались формулой для суммы геометрической прогрессии.

Теперь считаем интенсивность. Это квадрат модуля напряжённости, то есть

$$I_{\text{пр}}(\varphi) = \frac{1}{2} \langle \hat{E}_{\text{пр}} \hat{E}_{\text{пр}}^* \rangle =$$

$$I \frac{T^2}{(1-Re^{-i\phi})(1-Re^{i\phi})}$$

Раскрывая скобки в знаменателе, получаем

$$I \frac{T^2}{1+R^2-2R\cos\phi}$$

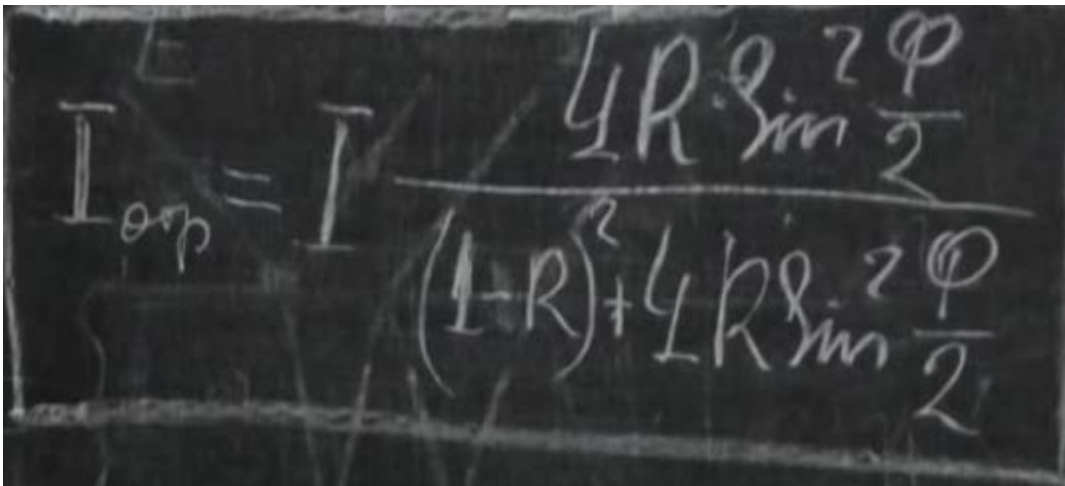
Используя тригонометрические соотношения, эту формулу можно преобразовать, чтобы получить

Конец вывода)

интенсивность прошедшей волны – это одна из двух формул Эйри:

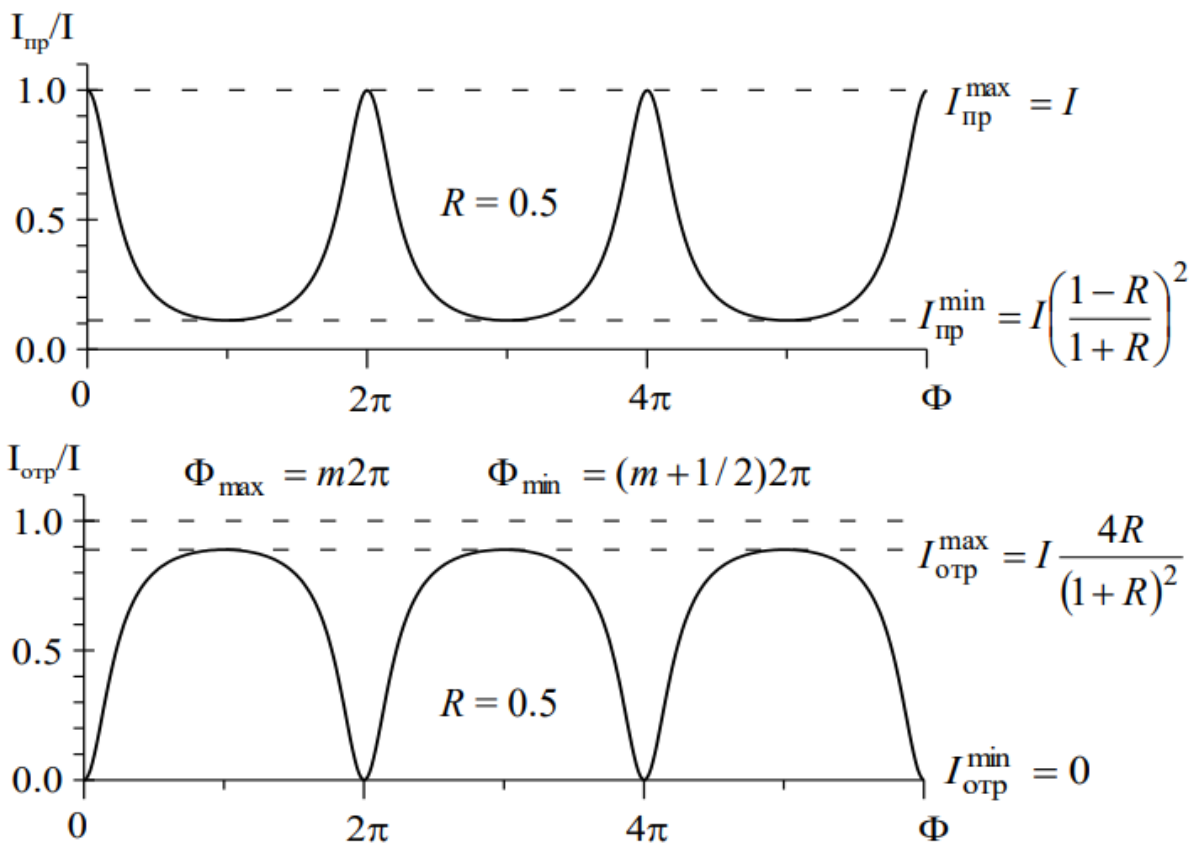
$$I = I \frac{T^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\phi}{2}}$$

Вторая формула Эйри - для интенсивности отражённых волн выводится аналогично. В общем случае, если $R+T$ не равно единице, что равносильно I прошедшей волны + I отражённой = I исходной (случай, когда волна, например, поглощается или накачивается средой), нам придётся опять аналогично считать напряжённость с учётом фазы каждой отражённой волны, суммировать, а зачем считать интенсивность. Но в простом случае, без поглощения, мы можем найти I отражённой как разность I падающей – I прошедшей. Также подставим $1-T=R$.



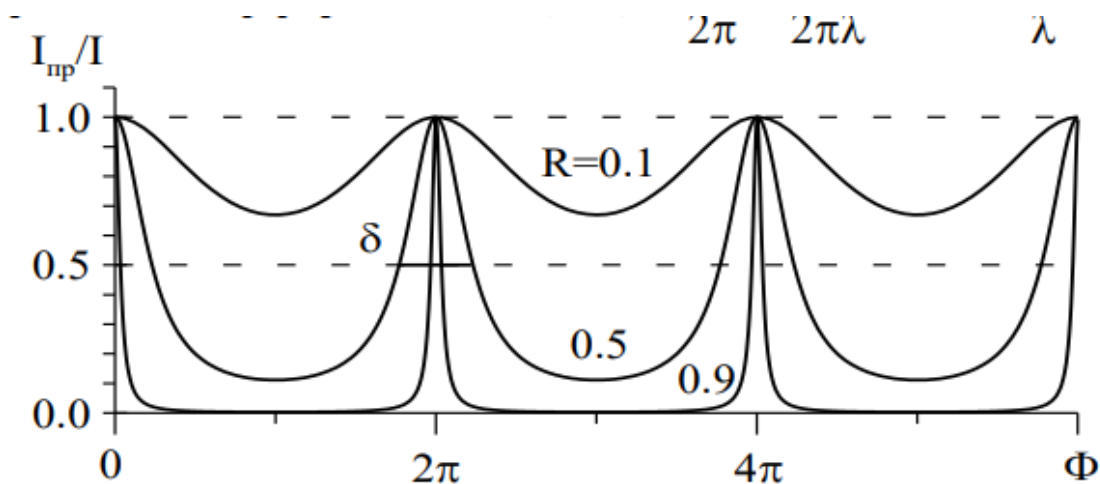
Если я не ошибаюсь, то на экзамене с вам будут спрашивать только этот случай ($R+T=1$, т.е. без поглощения или накачки).

Нарисуем графики, чтобы хоть-то проанализировать полученный результат.



Прикол: какая-то часть света проходит всегда! Максимум – весь свет, при Φ , кратном 2π . А вот в минимумах $((1-R)/(1+R))^2$. Много ли это или мало?

При $R=1/2$ это, как легко проверить, $1/9$. Всего-то. Для ещё больших, хотя бы $R=2/3$ это $1/25$. То есть с ростом R максимумы должно быстро стремиться к оси абсцисс.



С ростом R , как видно из графика, максимумы прошедшей волны становятся всё более резкими, но расстояние между ними остаётся прежним.

Теперь давайте займёмся видимостью. Подсчитаем её по определению:

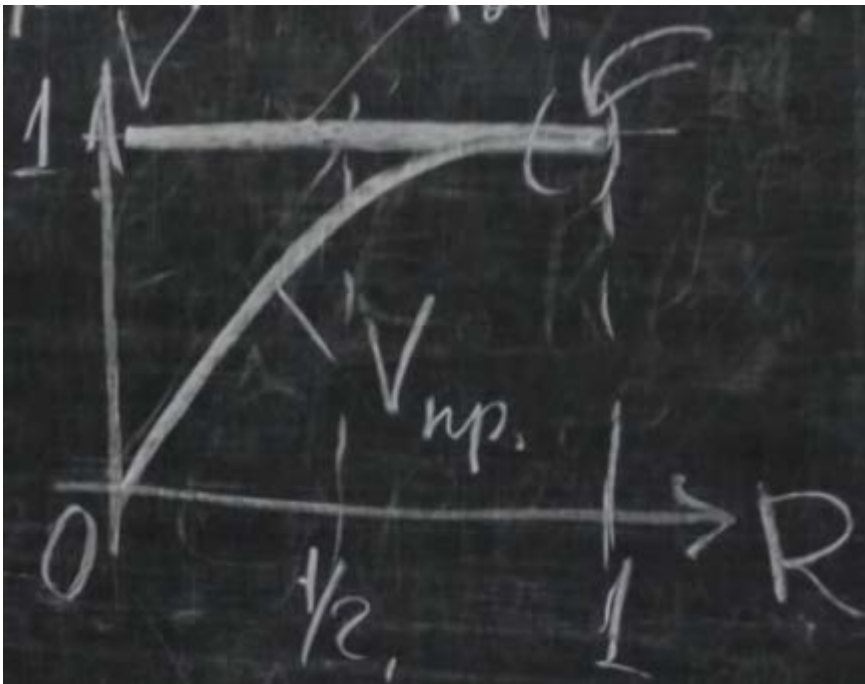
$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \Rightarrow$$

Для отражённой волны в минимумах всегда 0, то есть видность всегда 1, при любых R .

Для прошедшей волны получаем

$$V_{\text{пр}} = \frac{1 - \frac{(1-R)^2}{(1+R)^2}}{1 + \frac{(1-R)^2}{(1+R)^2}} = \frac{2R}{1+R^2}$$

Нарисуем графики зависимости видимости прошедшей и отражённой волны от R .



В реальном эксперименте R , как сказал Вячеслав Серафович, от 0,9 до 0,98. При таких R обе видности почти единица. Классно, т.е. экран мы можем ставить и туда, и туда. А куда всё-таки лучше?

Если внимательно проанализировать формулы, то мы увидим (и тут посмотрите ещё раз на предпоследний график): чем больше R , тем более узкие максимумы у прошедшей волны и широкие светлые (и узкие тёмные) полосы у отражённой волны. Естественно, что для регистрации лучше узкие светлые полосы, чем узкие тёмные, поэтому экран во всех многоволновых интерферометрах ставят на прошедшие волны.

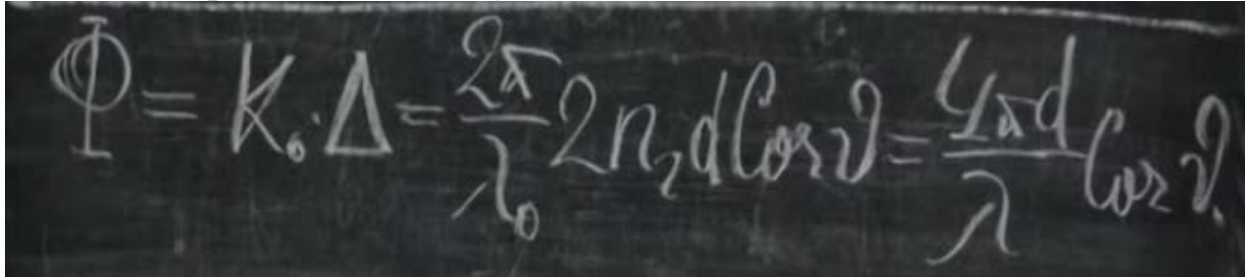
У Русакова (и в билетах) ещё фигурирует такая величина, как ширина интерференционных полос, которая вводится как ширина, на которой интенсивность достигается половины максимума. Ну вот она как раз для прошедших волн мала, а для отражённых велика.

И ещё одна бесполезная физическая величина из билетов – резкость изображения. По определению это

$$\frac{2\lambda}{\delta_{пр}}$$

Где b – ширина (см. предыдущий абзац). «пр» - от слова «прошедшая», очевидно, что для подсчёта резкости отражённой нужно подставить ширину отражённой волны.

На основе многоволновой интерференции можно сделать светофильтр. Представим себе, что на поверхность падает не монохроматический пучок света. Давайте вспомним определение Φ , там у нас была длина волны:



$$\Phi = k \cdot \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} 2n_2 d \cos \vartheta = \frac{4\pi d}{\lambda} \cos \vartheta$$

А у нас положение максимумов зависит от Φ – когда Φ кратно 2π , у нас весь свет проходит. Но Φ для разных λ разное! Отсюда пластинка может, например, зелёную компоненту пропустить, а красную и фиолетовую зарубить. Подвинув пластину, мы изменим уже угол θ , и теперь зелёная компонента может быть загублена, а вот красная окажется в фаворе. Наверняка все знают: есть такие хрени: смотришь под одним углом на хрень – она одного цвета, повернёшь – другого цвета. Ну вот многоволновая интерференция – одна из возможных причин.

Многоволновые интерференционные схемы.

Их две. Разбирать мы их не будем, но уж упомянем. Картинки с ними можно запомнить, чтобы на экзе их воспроизвести. Упаси Боже их считать.

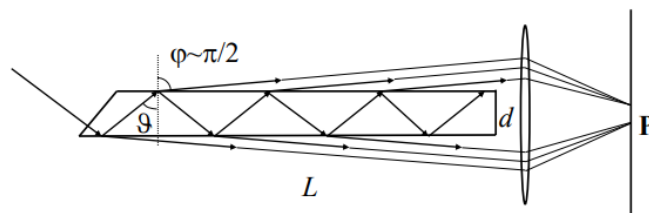
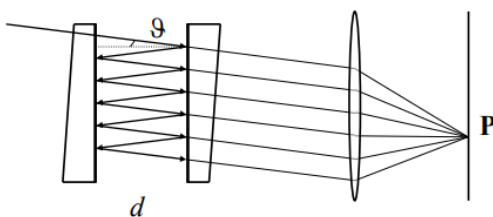
Многоволновые интерферометры

Интерферометр Фабри-Перо

Французские физики Шарль Фабри и Альфред Перо, 1899 г.

Пластинка Люммера-Герке

Немецкие физики Отто Ричард Люммер и Эрнст Герке, 1901 г.



Напоследок давайте рассмотрим такую дрянь из билетов, как

Интерференция при естественных условиях в тонких пленках.

Естественные условия – это естественный свет. Во-первых, он чудовищно немонохроматичен, во-вторых, источник может быть протяжённым.

Из-за протяжённости источника нам придётся сразу отказаться от метода деления волнового фронта. Дело в том, что интерферограмма при методе деления волнового фронта ухудшается при увеличении размеров источника (вспомним лампу с двумя щелями), а вот делению амплитуды может быть пофиг (вспомним мытарства с

плоскопараллельной пластины, там пучок был параллельный, источник вполне мог быть гигантским).

У Русакова даже есть на эту тему схема:

Основные характерные особенности методов реализации двухволновой интерференции

№	Характеристика	Метод деления	
		волнового фронта	амплитуды
1	Углы интерференции α и сходимости β	$\alpha \neq 0, \beta \neq 0 (d \neq 0)$	$\alpha \cong 0, \beta \cong 0 (d \cong 0)$
2	Локализация интерференционной картины	Не локализована	Локализована
3	Образование интерф. картины	Пучками от одной точки источника	Пучками от всех точек источника
4	Интенсивность интерференционной картины	Мала	Велика
5	Увеличение размера источника (s, Ω)	Ухудшает видимость, $\Omega < \Omega_k = \frac{\lambda}{d}, s < s_{\max} = \frac{\lambda}{\alpha}$	Не ухудшает видимость
6	Увеличение ширины спектра $\Delta\omega$ или $\Delta\tau$ ($\Delta l, m$)	Ухудшает видимость, $\Delta\tau < \tau_k \cong \frac{2\pi}{\Delta\omega}, \Delta l < l_k = \tau_k v$	Ухудшает видимость, $\Delta\tau < \tau_k \cong \frac{2\pi}{\Delta\omega}, \Delta l < l_k = \tau_k v$

Так вот, будем использовать метод деления амплитуды. Также из-за некогерентности разность ходов должна быть очень мала – порядка длины когерентности. Вот мы и приходим к тонким плёнкам, толщины как раз длины когерентности. Ну и в них, конечно, метод деления амплитуды, чем мы занимались последние страниц десять.

Таким образом, тонкие плёнки – это практически единственный вариант, чтобы наблюдать интерференцию естественного света.

Alles с интерференцией.